Juin 2021

Première année : mathématiques

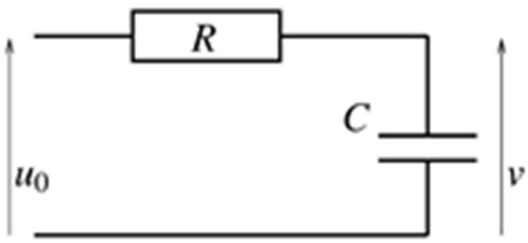
Contrôle terminal – 2h

Tout document interdit ; calculatrice de la faculté autorisée

Questions de cours
Définir l'affixe d'un point dans le plan complexe.
Soient $\underline{z}(\rho,\ \theta)$ et $\underline{z}'(\rho',\ \theta')$; calculer $\underline{z}\ \underline{z}'$ ainsi que $\underline{z}\ /\ \underline{z}'$.
Représenter l'allure de $f(x) = \tan(x)$ pour x entre $-3\pi/2$ et $+3\pi/2$.

Champ magnétique
Une particule de charge q et de masse m est soumise à un champ magnétique constant $\boldsymbol{B}$ (0, 0, B). Elle subit alors la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$, et son mouvement est décrit par l'équation $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$; $\boldsymbol{v}$ désigne la vitesse de la particule et $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}\ /\ \mathrm{d}t$ son accélération.
Ecrire en fonction des coordonnées (v_x, v_y, v_z) de $\boldsymbol{v}$ les équations correspondantes. Les résoudre.
A quoi ressemble la trajectoire de la particule ?

Nombres complexes
Un courant d'intensité i traverse le circuit suivant :



Connaissant R, C et u_0, on cherche i et v, qui sont liées par la relation $i = C\ \mathrm{d}v\ /\ \mathrm{d}t$.

1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la tension $v(t)$.
2. Si u_0 est une constante U_0, déterminer v.
3. Si u_0 est sinusoïdale, donnée sous forme complexe par $\underline{u}_0(t) = Ae^{j\omega t}$, alors on admet que $v(t)$ est de la forme $Be^{j(\omega t + \varphi)}$. Donner une relation entre B, φ et R, C, A, ω.
4. Calculer φ si $RC\omega = 3$.

Décomposition en série de Fourier
Déterminer la série de Fourier (termes en sinus et cosinus) de la fonction 2π- périodique, définie par $f(x) = x$ si $-\pi \leq x < \pi$.

Equation différentielle du 2$^{\text{ème}}$ ordre
Soit une masse $m = 1$ kg reliée au plafond par un ressort. Si on note $z = 0$ la position de la masse quand le ressort est au repos (c'est-à-dire, quand la masse n'y est pas encore accrochée), k la

constante de raideur du ressort et μ le coefficient de frottement qu'exerce l'air sur la masse (on suppose $\mu << k$), alors la position de la masse vérifie l'équation différentielle suivante :

$$z''(t) + 2\mu z'(t) + kz(t) = -g,$$

avec g l'accélération locale de la pesanteur.

1. Trouver une solution particulière constante. Interpréter physiquement le résultat.
2. Trouver la solution telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$. Interpréter physiquement le résultat.